第 7 講　2 次関数の様々な問題

PART1　ある範囲でつねに成り立つ不等式

1　2 次関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ について，次の条件が成り立つ定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　$1 \leqq x \leqq 3$ で，つねに $f(x)>0$ が成り立つ。

(2)　$1 \leqq x \leqq 3$ で，つねに $f(x)<0$ が成り立つ。

Point Pickup

ある区間において，つねに $f(x)>0$ が成り立つ $\Longleftrightarrow$ ある区間における $f(x)$ の最小値が正

ある区間において，つねに $f(x)<0$ が成り立つ $\Longleftrightarrow$ ある区間における $f(x)$ の最大値が負

第7講　PART1　確認問題

2次関数 $f(x)=x^2+2ax+2$ について，次の条件が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。
選択肢は最も適切なものを選べ。

1　$2\leqq x\leqq 4$ で，つねに $f(x)>0$ が成り立つ。

求める条件は $f(x)$ の $2\leqq x\leqq 4$ における [ア] が [イ] となることである。
次の(i)，(ii)に場合分けして考えると，$2\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の [ア] は，

(i)　$y=f(x)$ のグラフの軸が，[ウ]

(ii)　(i)以外のときの [エ]

(i)，(ii)より，求める定数 a の値の範囲は [オ]

[[ア]の選択肢]

①　最大値　　②　最小値

[[イ]の選択肢]

①　0以上　　②　0以下　　③　正　　④　負

[[ウ]の選択肢]

①　$2\leqq x\leqq 3$ の範囲にあるときの　$f(4)$
②　$3\leqq x\leqq 4$ の範囲にあるときの　$f(2)$
③　$2\leqq x\leqq 4$ の範囲にあるときの　$f(-a)$

[エ の選択肢]

① $f(2)$　② $f(4)$　③ $f(-a)$

④ $f(2)$ または $f(4)$　⑤ $f(2)$ または $f(-a)$

⑥ $f(4)$ または $f(-a)$

[オ の選択肢]

① $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$　② $a<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<a$

③ $a<-\frac{9}{4}$　④ $a>-\frac{9}{4}$

⑤ $a<-\frac{3}{2}$　⑥ $a>-\frac{3}{2}$

2 $2 \leqq x \leqq 4$ で，つねに $f(x) < 0$ が成り立つ。

求める条件は $f(x)$ の $2 \leqq x \leqq 4$ における [カ] が [キ]

となることである。

$2 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の [カ] は，[ク] であるから，

求める定数 a の値の範囲は [ケ]

[[カ] の選択肢]

① 最大値　② 最小値

[[キ] の選択肢]

① 0 以上　② 0 以下　③ 正　④ 負

[[ク] の選択肢]

① $f(2)$　② $f(4)$　③ $f(-a)$

④ $f(2)$ または $f(4)$　⑤ $f(2)$ または $f(-a)$

⑥ $f(4)$ または $f(-a)$

[[ケ] の選択肢]

① $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$　② $a < -\sqrt{2},\ \sqrt{2} < a$

③ $a < -\dfrac{9}{4}$　④ $a > -\dfrac{9}{4}$

⑤ $a < -\dfrac{3}{2}$　⑥ $a > -\dfrac{3}{2}$

第 7 講　2次関数の様々な問題

PART1　ある範囲でつねに成り立つ不等式

1　2次関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ について，次の条件が成り立つ定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　$1 \leqq x \leqq 3$ で，つねに $f(x)>0$ が成り立つ。

(2)　$1 \leqq x \leqq 3$ で，つねに $f(x)<0$ が成り立つ。

$f(x)=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，軸の方程式は $x=a$

(1)　求める条件は2次関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ の $1 \leqq x \leqq 3$ における最小値が正となることである。

$1 \leqq x \leqq 3$ における最小値は

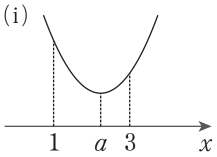
(i)　軸 $x=a$ が $1 \leqq x \leqq 3$ にあるとき　$f(a)=-a^2+1$

(ii)　(i)以外のとき　$f(1)=-2a+2$ または $f(3)=-6a+10$ である。

(i)のとき，すなわち $1 \leqq a \leqq 3$ のとき

$-a^2+1>0$ より $a^2<1$　　$-1<a<1$

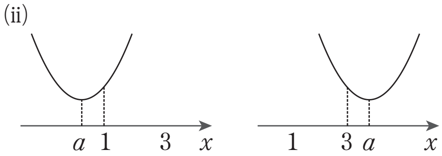
これは $1 \leqq a \leqq 3$ を満たさない。



(ii)のとき，すなわち $a<1$ または $3<a$ のとき

$f(1)=-2a+2>0$ かつ $f(3)=-6a+10>0$ より

$a<1$ かつ $a<\dfrac{5}{3}$　　よって　$a<1$



$a<1$ または $3<a$ より　$a<1$

以上より，求める a の値の範囲は　$a<1$

⑵　求める条件は２次関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ の $1 \leqq x \leqq 3$ における最大値が負となることである。

$1 \leqq x \leqq 3$ における最大値は $f(1)$ または $f(3)$

よって

$$f(1)<0 \text{ かつ } f(3)<0$$

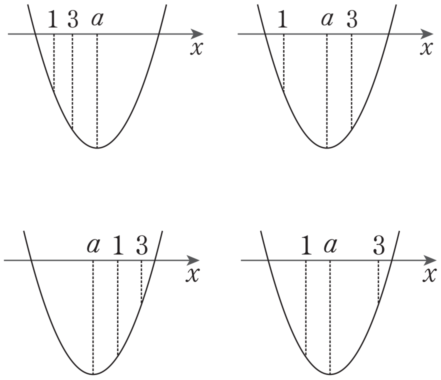
より

$$-2a+2<0 \text{ かつ } -6a+10<0$$

したがって

$$a>1 \text{ かつ } a>\frac{5}{3}$$

より，求める a の値の範囲は　$a>\dfrac{5}{3}$



第 7 講　PART1　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②，イ：③，ウ：③，エ：④，オ：⑥

[解説]

$$f(x)=x^2+2ax+2=(x+a)^2-a^2+2$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，軸の方程式は $x=-a$

求める条件は２次関数 $f(x)=x^2+2ax+2$ の

$2\leqq x\leqq 4$ における**最小値が正**となることである。[A]

[A]
ある区間において，つねに $f(x)>0$ が成り立つ
$\Longleftrightarrow$ ある区間における $f(x)$ の最小値が正
ある区間において，つねに $f(x)<0$ が成り立つ
$\Longleftrightarrow$ ある区間における $f(x)$ の最大値が負

$2\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最小値は，次の(i)，(ii)に場合分けできる。

(i)　軸 $x=-a$ が **$2\leqq x\leqq 4$ の範囲にあるとき**

最小値は　$f(-a)$

(ii)　(i)以外のとき

最小値は　$f(2)$ または $f(4)$

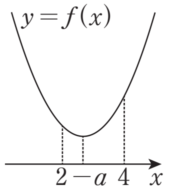
(i)のとき，$2\leqq -a\leqq 4$ すなわち $-4\leqq a\leqq -2$ のとき

$$f(-a)=-a^2+2>0$$

より　$a^2<2$

ゆえに　$-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

$-2<-\sqrt{2}$ より，これは $-4\leqq a\leqq -2$ を満たさない。



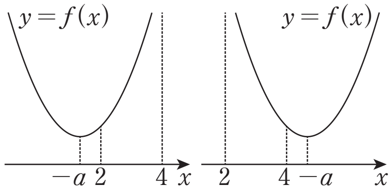
(ii)のとき，すなわち $a<-4$ または $-2<a$ のとき

$f(2)=4a+6>0$ かつ $f(4)=8a+18>0$ より

$$a>-\frac{3}{2} \text{ かつ } a>-\frac{9}{4}$$

よって　$a>-\dfrac{3}{2}$

これと $a<-4$ または $-2<a$ より　$a>-\dfrac{3}{2}$



(i)，(ii)より，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a>-\dfrac{3}{2}}$

2 [正解] カ：①，キ：④，ク：④，ケ：③

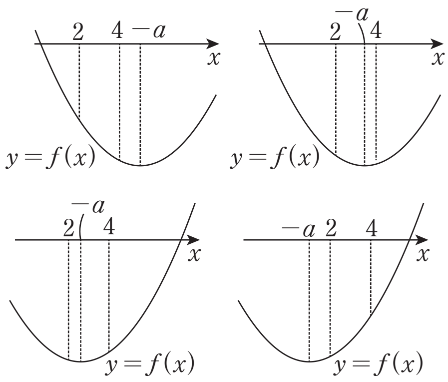
[解説]

$$f(x)=x^2+2ax+2=(x+a)^2-a^2+2$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，軸の方程式は $x=-a$

求める条件は 2 次関数 $f(x)=x^2+2ax+2$ の

$2\leqq x\leqq 4$ における**最大値**が**負**となることである。[A]



$2\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最大値は

$\boldsymbol{f(2)}$ **または** $\boldsymbol{f(4)}$

であるから，

$f(2)=4a+6<0$ かつ $f(4)=8a+18<0$ より

$a<-\dfrac{3}{2}$ かつ $a<-\dfrac{9}{4}$

したがって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a<-\dfrac{9}{4}}$